2019/GI/1. feladat
Béla 88 pontos tesztje 1 ponttal növelte az eddigi pontátlagát. A következő tesztje, ami 63 pontos lett, viszont 2 ponttal rontotta a mostani átlagát. Hány tesztet írt Béla összesen?

2019/GI/1. megoldás
Jelölje az eddigi tesztjeinek átlagát $\overline{x}$ és az eddig írt tesztjeinek számát n.
A feladat szerint

$$\frac{n \cdot \overline{x} + 88}{n+1} = \overline{x} + 1$$
$$\frac{n \cdot \overline{x} + 88 + 63}{n+2} = (\overline{x} + 1) - 2 = \overline{x} - 1$$

Rendezve az egyenleteket

$$n \cdot \overline{x} + 88 = (n+1)(\overline{x}+1)$$
$$n \cdot \overline{x} + 88 = n \cdot \overline{x} + n + \overline{x} + 1$$
$$87 = \overline{x} + n$$

$$n \cdot \overline{x} + 88 + 63 = (n+2)(\overline{x}-1)$$
$$n \cdot \overline{x} + 151 = n \cdot \overline{x} - n + 2\overline{x} - 2$$
$$153 = 2\overline{x} - n$$

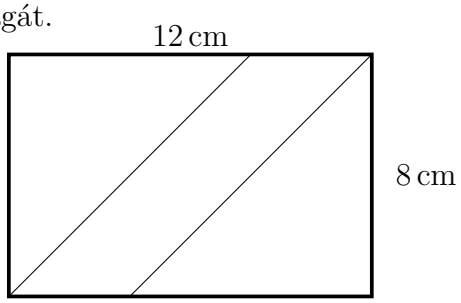
Összeadva őket

$$240 = 3\overline{x}$$
$$\overline{x} = 80$$
$$n = 7$$

A tesztek száma eddig 7 volt, most írt kettőt, tehát Béla összesen 9 tesztet írt.

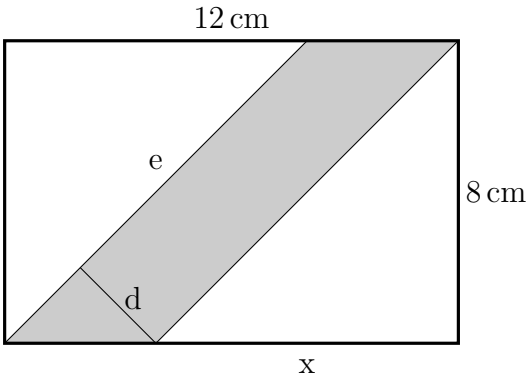
2019/GI/2. feladat

Az ábrán látható téglalap oldalai 8 cm és 12 cm. A téglalapot a csúcsain keresztül két párhuzamos egyenessel három egyenlő területű részre bontottuk. Adjuk meg a párhuzamos egyenesek egymástól való pontos távolságát.



2019/GI/2. megoldás

Használjuk az ábra jelölését:



A terület harmada a levágott háromszög területe

$$\frac{8 \cdot x}{2} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 12 = 32$$
$$x = 8$$

Az párhuzamos egyenesek hossza

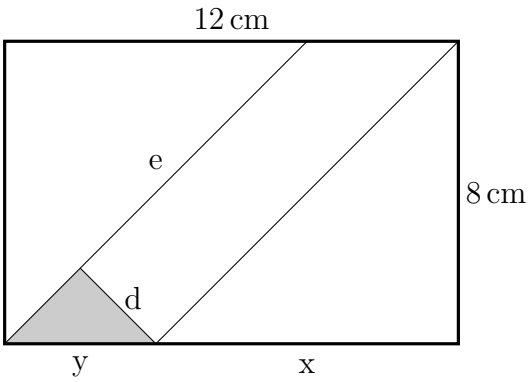
$$e = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

A satírozott paralelogramma területe szintén 32

$$8\sqrt{2} \cdot d = 32$$
$$d = 2\sqrt{2}$$

A párhuzamos egyenesek távolsága $2\sqrt{2}$ cm.

2. megoldás
Használjuk az ábra jelölését:



A terület harmada a levágott háromszög területe

$$\frac{8 \cdot x}{2} = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 12 = 32$$
$$x = 8$$

Azaz a behúzott egyenesek 45°-os szöget zárnak be a téglalap oldalaival.
A paralelogramma y-nal jelölt oldala 4 cm,
Az ábrán jelzett háromszög 45°-os derékszögű, így

$$d = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

2019/GI/3. feladat
Melyek azok az $(x; y; z)$ valós számhármasok, melyek kielégítik az

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = z^2 + 2z + 5 \end{cases}$$

egyenletrendszert.

2019/GI/3. megoldás
Az első egyenletből

$$y = 4 - x$$

ezt a második egyenletbe beírva és rendezve

$$\begin{aligned} x(4 - x) &= z^2 + 2z + 5 \\ 4x - x^2 &= (z + 1)^2 + 4 \\ 0 &= x^2 - 4x + 4 + (z + 1)^2 \\ 0 &= (x - 2)^2 + (z + 1)^2 \end{aligned}$$

Ez csak úgy lehetséges, hogy

$$(x - 2)^2 = 0 \qquad (z + 1)^2 = 0$$
$$x = 2 \qquad z = -1$$

Ebből $y = 4 - x = 2$
Egy megoldást kaptunk $(2; 2; -1)$.

2. megoldás
Számítsuk ki $(x - y)^2$ értékét

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 4^2 - 4\left(z^2 + 2z + 5\right) = 16 - 4z^2 - 8z - 20 =$$
$$= -4z^2 - 8z - 4 = -4\left(z^2 + 2z + 1\right) = -4(z + 1)^2$$

Mivel $(x - y)^2 \geq 0$, ezért

$$-4(z + 1)^2 \geq 0$$

azaz

$$(z + 1)^2 = 0$$
$$z = -1$$

Az egyenlőtlenségben egyenlőség van, ekkor $x = y$ és összegük 4, azaz $(x - y)^2 = 0$

$$x = y = 2$$

3. megoldás
x és y pozitívak, írjunk fel számtani-mértani egyenlőtlenséget

$$2 = \frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{(z^2 + 2z + 5)} = \sqrt{(z + 1)^2 + 4} \geq \sqrt{4} = 2$$

Mindenhol egyenlőség van, ezért

$$z = -1;\ x = y = 2$$

2019/GI/4. feladat
Az n pozitív egész szám prímtényezős felbontásában csak két prím, a 2 és a 3 szerepel. Adjuk meg n értékét, ha tudjuk, hogy n^2-nek háromszor annyi pozitív osztója van, mint az n-nek.

2019/GI/4. megoldás
Keressük az ismeretlen számot $n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ alakban. Ekkor $n^2 = 2^{2\alpha} \cdot 3^{2\beta}$
Az osztók száma:

$$d(n) = (\alpha+1)(\beta+1); \qquad d(n^2) = (2\alpha+1)(2\beta+1)$$

A feladat feltételét felírva és rendezve

$$\begin{aligned} 3 \cdot (\alpha+1)(\beta+1) &= (2\alpha+1)(2\beta+1) \\ 3\alpha\beta + 3\alpha + 3\beta + 3 &= 4\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 1 \\ 0 &= \alpha\beta - \alpha - \beta - 2 \\ 3 &= \alpha\beta - \alpha - \beta + 1 \\ 3 &= (\alpha-1)(\beta-1) \end{aligned}$$

Ebből két eset adódik

$$\begin{cases} \alpha - 1 = 1 \\ \beta - 1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha - 1 = 3 \\ \beta - 1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

Két számot kaptunk:

$$n_1 = 2^2 \cdot 3^4 = 324; \qquad n_2 = 2^4 \cdot 3^2 = 144$$

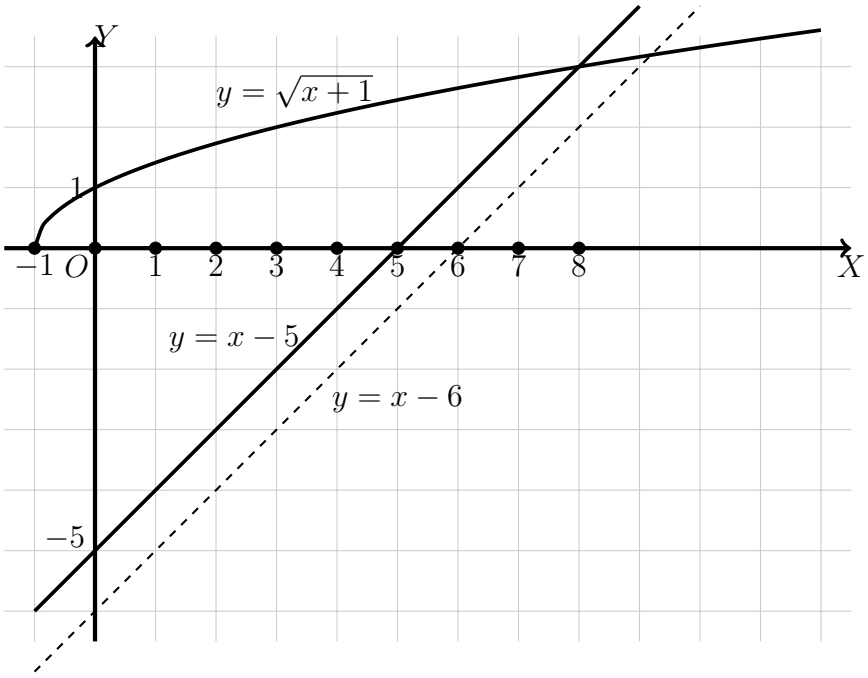
2019/GI/5. feladat
Mely p egész paraméter esetén lesz legfeljebb 10 egész megoldása a következő egyenlőtlenségnek?

$$\sqrt{x+1} - x \geq p$$

2019/GI/5. megoldás
Átrendezzük az egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - x &\geq p \\ \sqrt{x+1} &\geq x + p \end{aligned}$$

és ábrázoljuk mind a két oldalt:



A p paramétert változtatva az egyenes párhuzamosan eltolódik. Innen következik, hogy

$$p \geq -5$$

2. megoldás
Egyenlőtlenségünk értelmezési tartománya: $-1 \leq x$
Ha növeljük p értékét, akkor csökken a megoldások száma. Ezért keressük meg azt az egész p számot, melyre pontosan 10 megoldás van.
Rendezzük egyenlőtlenségünket

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} - x &\geq p \\ -p &\geq x - \sqrt{x+1} \\ \frac{5}{4} - p &\geq (x+1) - \sqrt{x+1} + \frac{1}{4} \\ \frac{5}{4} - p &\geq \left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

A bal oldal állandó, a jobb oldal pedig $0 \leq x$ esetén szigorúan monoton növekszik.
Ha legfeljebb 10 egész megoldás lehet, akkor az $x = 8$-ra még teljesülnie kell az egyenlőtlenségnek (-1-től 8-ig 10 db megoldás van), míg $x = 9$-re már nem, azaz

$$\frac{5}{4} - p = \left(\sqrt{8+1} - \frac{1}{2}\right)^2 \qquad \frac{5}{4} - p < \left(\sqrt{9+1} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{5}{4} - p = \frac{25}{4} \qquad \frac{5}{4} - p < \left(\sqrt{10} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{2\sqrt{10}-1}{2}\right)^2$$

$$-5 = -\frac{20}{4} = p \qquad p > \sqrt{10} - 9 \approx -5,8377$$

A megfelelő érték:

$$p = -5$$

amire még éppen 10 megoldás lesz. A keresett érték tehát

$$p \geq -5$$